数理解析研究所講究録
235巻 1975年 88-101

On $S\otimes_R S$-module structure of S/R-Azumaya algebras when S/R is a Hopf Galois extension.

奈良女大 理　横川賢二

§0. 序

Rを可換環，Sを可換なR-algとし，R-moduleと見てfin.gen. proj.であるとする。R上のAzumaya alg AがSをmax.comm. subalg.として含み，さらにleft S-moduleと見てprojのとき，AをS/R-Azumaya algと呼ぶことにする。神崎[6]はS/RがGalois拡大の時S/R-Azumaya algの構造をgeneralized crossed productを用いて決定し，いわゆる7-terms exact seq.を具体的に構成した。この小文ではS/RがHopf Galois拡大のとき，S/R-Azumaya algの$S\otimes_R S$-module structureを調べ，それと7-terms exact seq.との関係を述べる。以下R, Sは上述の様に共に可換環とし，SはR-fin.gen.proj.とする。さらに$\otimes = \otimes_R$，$Hom = Hom_R$としR-alg Tについて$T^g = T\otimes\cdots\otimes T$（$g$個）とする。

§1. S/R-Azumaya alg.のS^2-projectivityについて

A を S/R-Azumaya alg とする。$A \ni a$, $S^2 \ni x \otimes y$, $x \otimes y \cdot a = xay$ によって A を S^2-module と見ることにする。次の結果が基本的である。

Theorem 1.1. 次は同値.

(i) S/R は quasi-Frob. 拡大である。即ち $\mathrm{Hom}(S,R)$ は S-proj.

(ii) S/R-Azumaya alg. $\mathrm{Hom}(S,S)$ は S^2-proj である。

(iii) 任意の S/R-Azumaya alg は S^2-proj である。

証明) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Morita theory より $\mathrm{Hom}(S,S) \cong S \otimes \mathrm{Hom}(S,R)$ より明らか。(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) A を任意の S/R-Azumaya alg とすれば, $S \otimes A \cong \mathrm{Hom}_S(P,P)$ P: fin. gen. S-proj module となる。Chase-Rosenberg [3] 2.13. と同様に P に S^2-module の構造が入り, P は S^2-proj. となる。$P \cong S^2$ の時は上の同型の右辺 $\cong S \otimes \mathrm{Hom}(S,S)$ であるから $S \otimes A$ は S^3-proj となる。従って A は S^2-proj. である。一般の時は直和成分に分解して, 同様の議論が成立する。逆は明らかである。

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) の証明で用いたのは S^2-proj. module P の S-endomorphism ring が S^3-proj ということだけであるから

Corollary 1.2. ある S/R-Azumaya alg が S^2-proj $\Leftrightarrow$ 全ての S/R-Azumaya alg. が S^2-proj.

sep. Galois 拡大の時は明らかに Theorem 1.1 の同値な条件を満足するが，Hopf Galois 拡大の時も満足する。その証明の為に Hopf Galois 拡大の定義を用いやすい形で述べる。

H を finite cocomm. Hopf alg. (over R) with antipode λ とする。

$H \ni h$, $\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} \in H \otimes H$, $\lambda(h) = h^{-1} \in H$ と書くことにする。今 S が H-module の構造をもち，その structure map $\psi : H \otimes S \longrightarrow S$ が ① $\psi(h \otimes xy) = \sum_{(h)} \psi(h_{(1)} \otimes x)\psi(h_{(2)} \otimes y)$

② $\psi(h \otimes 1) = \varepsilon(h)$ を満す時 ψ を measuring と呼び，

$\psi(h \otimes x) = h \cdot x$ と書くことにする。

Definition) S に measuring が定義されており，measuring より定義された alg. homo. $S \# H \ni s \# h \longmapsto [x \mapsto s\, h \cdot x] \in \mathrm{Hom}(S, S)$ が同型の時，拡大 S/R を H-Hopf Galois 拡大と呼ぶ。

Chase-Sweedler [4] より S/R が H-Hopf Galois 拡大の時，次の alg. iso. が成立する。

$S \otimes S \cong S \otimes \mathrm{Hom}(H, R) \cong \mathrm{Hom}(H, S)$, $x \otimes y \longmapsto [h \mapsto x\, h \cdot y]$

さらに S/R が H-Hopf Galois 拡大の時，S/R-Azumaya alg. $\mathrm{Hom}(S, S)$ の S^2-module structure を同型でうつして $S \# H$ の S^2-structure は $S^2 \ni x \otimes y$, $S \# H \ni s \# h$, $x \otimes y * s \# h = \sum_{(h)} x s\, h_{(1)} \cdot y \# h_{(2)}$ である。

<u>Theorem 1.3.</u> S/R : H-Hopf Galois 拡大 $\Longrightarrow$ quasi-Frob. 拡大

証明) 一般に，H は $H^* = \mathrm{Hom}(H, S)$-proj であり，その structure は

は $H^* \ni f$, $H \ni h$. $f \cdot h = \sum_{(h)} f(h_{(1)}) h_{(2)}$ で与えられる。
特に, $S \otimes H$ は $\mathrm{Hom}_S(S \otimes H, S) \cong \mathrm{Hom}(H, S) \cong S^2$-proj である。
$S \otimes H$ の S^2-module structure は $S \# H = \mathrm{Hom}(S, S)$ の S^2-module struct.
と同じであるから. 結局 $\mathrm{Hom}(S, S)$: S^2-proj である。

以下. 拡大 S/R は H-Hopf Galois 拡大 であるとする。従って
Th. 1.1, 1.3. より A を S/R-Azumaya alg とすれば. $A = \theta(A) \otimes_{S^2} (S \# H)$
$\theta(A) \in \mathrm{Pic}(S^2)$ と S^2-module として書けることになる。例えば A
が split type の時は

<u>Proposition 1.4.</u> $A = \mathrm{Hom}(P, P)$ $P \in \mathrm{Pic}(S)$ ならば
$\theta(A) \cong (P \otimes S) \otimes_{S^2} (S \otimes P^*)$, $P^* = \mathrm{Hom}_S(P, S)$ である。

証明) $\alpha : (P \otimes S) \otimes_{S^2} (S \otimes P^*) \otimes_{S^2} (S \# H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, P)$
を $\alpha((p \otimes s) \otimes (t \otimes q^*) \otimes (u \# h))(x) = t u h \cdot (s\, q^*(x))\, p$.
で def. すると. α は well-defined S^2-homo. である。あと localize
して調べればよい。local の時は α は $S \# H \cong \mathrm{Hom}(S, S)$ にな
る。

§2. smash product algebras.

<u>Definition)</u> $\sigma : H \otimes H \longrightarrow S$ が normal 2-cocycle である
とは σ は $\mathrm{Hom}(H^2, S)$ の元として invertible で 次の条件を満

たす時いう。① ${}^{\forall}f\otimes g\otimes h \in H^3$ について $(f\cdot\sigma(g\otimes h))\sigma(f\otimes gh) = \sigma(fg\otimes h)\sigma(f\otimes g)\varepsilon(h)$. ② $\sigma(1\otimes h) = \sigma(h\otimes 1) = \varepsilon(h)$.

さらに $\sigma\sim 1$ とは ${}^{\exists}\rho \in \mathrm{Hom}(H,S)$, ρ は invertible で $\rho(h) = \varepsilon(h)$ if $h\in R$. をみたし, $\sigma(g\otimes h) = \sum_{(g),(h)} [g_{(1)}\cdot\rho(h_{(1)})]\rho^{-1}(g_{(2)}h_{(2)})\rho(g_{(3)})\varepsilon(h_{(3)})$

$\sigma\sim\tau \overset{def}{\Longleftrightarrow} \sigma*\tau^{-1}\sim 1$. $*$ は $\mathrm{Hom}(H^2,S)$ での積.

今, σ を normal 2-cocycle とした時, smash product を次の様に def. する。 $S\#H = S\otimes H$ as R-module. 積は $x\#g\cdot y\#h = \sum_{(g),(h)} x(g_{(1)}\cdot y)\,\sigma(g_{(2)}\otimes h_{(1)})\# g_{(3)}h_{(2)}$. smash product $S\#H$ は単位元 $1\#1$ をもつ alg. になるが, より強く,

<u>Proposition 2.1</u> $S\#H$ は S/R-Azumaya alg. である。

(証明) $S\otimes(S\#H) \cong \mathrm{Hom}_S(S^2,S^2)$ となるからよい。

<u>Proposition 2.2</u> $\sigma\sim\tau \Longleftrightarrow S\#_\sigma H \cong S\#_\tau H$ 但し同型は R-alg. iso でかつ S を fix する。

(証明) 容易であるから省略する。

この節では次の結果を証明することを目標とする。

<u>Theorem 2.3</u> $A = \Theta(A)\otimes_{S^2}(S\#H)$ を S/R-Azumaya alg とする。 A が smash product である $\Longleftrightarrow \Theta(A)\cong S^2$

次の Lemmas の証明は容易であるから省略する。

<u>Lemma 2.4.</u> $A = \theta(A) \otimes_{S^2} (S \# H) \supset \theta(A) \otimes_{S^2} S$ は max. comm. subalg. S と一致する。

<u>Lemma 2.5.</u> $A \cong S \# H$ as S^2-module $\Rightarrow A^\circ \cong S \# H$ as S^2-module.

<u>Definition)</u> A を S/R-Azumaya alg とする。action of H on S が A-inner とは $\exists v \in \mathrm{Hom}(H, A)$ invertible element st. $v(h)s = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot s) v(h_{(2)})$, $v(1_H) = 1_A$ $s \in S$, $h \in H$ のときいう。
v が A-inner action を与えるという。

<u>Proposition 2.6.</u> $P \in \mathrm{Pic}(S)$ st. $\pi : P \otimes S \cong S \otimes P$ S^2-iso. が存在するとする。(P は functor として Pic を取った Amitsur complex の 0 次の cocycle である) このとき、action of H on S は $\mathrm{Hom}(P, P)$-inner である。

(証明)
$$\begin{array}{ccccc} P & \hookrightarrow & P \otimes S & \overset{\pi}{\cong} & S \otimes P \\ \downarrow{\scriptstyle v(h)} & & \downarrow{\scriptstyle V(h)} & & \downarrow{\scriptstyle V_1(h)} \\ P & \longleftarrow & P \otimes S & \overset{\pi}{\cong} & S \otimes P \end{array} \qquad h \in H.$$

なる comm. diagram により $v(h)$, $V(h)$ を def. する。但し $V_1(h)(s \otimes p) = h \cdot s \otimes p$, $s \otimes p \in S \otimes P$. $v \in \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}(P, P))$ が inner action を与えることを示そう。まず $s \in S$. $p \in S$ について.

$$V(h)(sp\otimes 1) = \pi^{-1} V_1(h)\pi(sp\otimes 1) = \pi^{-1} V_1(h)(s\otimes 1)\pi(p\otimes 1)$$
$$= \pi^{-1}\Big(\sum_{(h)}(h_{(1)}\cdot s\otimes 1)\ V_1(h_{(2)})\pi(p\otimes 1)\Big) = \sum_{(h)}(h_{(1)}\cdot s\otimes 1)\ V(h_{(2)})(p\otimes 1)$$

であるから，　$v(h)(sp) = \sum_{(h)}(h_{(1)}\cdot s)\,v(h_{(2)})(p)$　 i.e. $v(h)s = \sum h_{(1)}\cdot s\, v(h_{(2)})$

又，$v(1_H) = 1$ は明らかであるから，あと v が invertible を示せばよい。$V'(h) = V(h^{-1}) : P\otimes S \longrightarrow P\otimes S$ とおき $V(h), V'(h)$ を

$Hom_{R\otimes S}(P\otimes S, P\otimes S) \cong Hom(P,P)\otimes S$ なる同型の右辺で表現し，$V(h) = \sum f_i^h \otimes s_i^h$，　$V'(h) = \sum f_j'^h \otimes s_j'^h$ とする。$v(h)$ は $v(h) = \sum s_i^h f_i^h$ となる。$v' \in Hom(H, Hom(P,P))$ を

$v'(h) = \sum_{(h),j} (h_{(1)}^{-1}\cdot s_j'^{h_{(2)}})\, f_j'^{h_{(2)}}$ で def. すれば，v' は v の inverse である。

<u>Proposition 2.7</u> (Sweedler [7])　A を S/R-Azumaya alg とし，v が inner action を与えるとする。$\sigma = (m_A(v\otimes v)) * (v^{-1} m_H) \in Hom(H^2, A)$ とおく。但し m_A, m_H はそれぞれ A 及び H での積，$*$ は $Hom(H^2, A)$ での積を表わす。このとき，

(i)　σ の image は S に含まれる。

(ii)　σ は normal 2-cocycle である。

(iii)　$S\# H \ni s\# h \longmapsto s v(h) \in A$ は R-alg. iso. で S を fix する。

(証明)(i)(ii) Sweedler [7] 9.6. の証明がそのまゝ成立する。(iii) は $S\# H$, A が S/R-Azumaya alg に注意すればやさしい。

Corollary 2.8. $P \in \mathrm{Pic}(S)$ を Prop. 2.6. の通りとすると $\mathrm{Hom}(P, P)$ は smash product alg. である。

(Theorem 2.3. の証明) smash product ならば $\theta(A) \cong S^2$ は明らかであるから逆を示す。A を S/R-Azumaya alg とし、$A \cong S \# H$ とする。Lemma 2.4. より、上の S^2-isomorphism による A の単位元の移り先は $1 \# 1$ としてよい。$V : S \# H \cong A$, $V^\circ : S \# H \cong A^\circ$ v, v° をそれぞれ V, V° の H への制限とする。$A \otimes A^\circ \cong \mathrm{Hom}(A, A)$ であるから S^2/R を H^2-Hopf Galois 拡大と見ると次の S^4-iso. が得られる。$S^2 \# H^2 \cong A \otimes A^\circ \cong \mathrm{Hom}(A, A) \cong (A \otimes S^2) \underset{S^4}{\otimes} (S^2 \otimes A^*) \underset{S^4}{\otimes} (S^2 \# H^2)$ 但し $A^* = \mathrm{Hom}_{S^2}(A, S^2)$. 従って $A \otimes S^2 \cong S^2 \otimes A$ S^4-iso である。Prop. 2.6. Cor. 2.8. より $\exists\, \tau : H^2 \otimes H^2 \longrightarrow S^2$ normal 2-cocycle s.t.

$W : S^2 \underset{\tau}{\#} H^2 \cong \mathrm{Hom}(A, A)$.

$W^{-1}(V \otimes V^\circ)$ を S^4-auto. of $S^2 \# H^2$ と見て. $W^{-1}(V \otimes V^\circ) = u \in S^4$ と書ける。$u = \sum p_i \otimes q_i \otimes r_i \otimes s_i$, $u^{-1} = \sum p_j' \otimes q_j' \otimes r_j' \otimes s_j'$ とし, $(v \otimes v^\circ)' : H^2 \longrightarrow A \otimes A^\circ \cong \mathrm{Hom}(A, A)$ を $(v \otimes v^\circ)'(g \otimes h) = W\Big(\sum_{(g),(h)} \big(\sum_j r_j' g_{(1)}^{-1} \cdot p_j' \otimes s_j' h_{(1)}^{-1} \cdot q_j'\big)\big(g_{(2)}^{-1} \otimes h_{(2)}^{-1} \cdot \tau^{-1}(g_{(3)} \otimes h_{(3)} \otimes g_{(4)}^{-1} \otimes h_{(4)}^{-1})\big) \underset{\tau}{\#} (g_{(5)}^{-1} \otimes h_{(5)}^{-1})\Big)$ で def. すれば $(v \otimes v^\circ)'$ は $v \otimes v^\circ$ の inverse である。従って, v も invertible である。v が inner action を与えていることはやさしい。従って, Prop. 2.7. より, A は smash product alg. である。

<u>Corollary 2.9.</u> A を S/R-Azumaya alg とする。
action of H on S が A-inner ⟺ A が smash product alg. である。

<u>Corollary 2.10</u> (Skolem-Noether) もし $Pic(S^2)=0$ ならば
任意の S/R-Azumaya alg A について H の S への action は A-inner に A への action に拡張できる。

§3. Cocycle condition of $\Theta(\cdot)$, S/R-Azumaya alg の構造.

<u>Proposition 3.1.</u> A を S/R-Azumaya alg とする。
$\Theta(A)$ は ~~functor~~ として Pic を取った時の S/R の Amitsur complex の 1 次の cocycle である。(これを簡単に $\Theta(A)\in Z'(Pic)$ と書く.)

(証明) $Hom(S,S)\otimes S=(S\# H)\otimes S\cong Hom_{R\otimes S}(S\# H,\ S\# H)$
及び $A\otimes S\cong Hom_{R\otimes S}(A,A)$ なる同型を Prop. 1.4. を用いて計算すればよい。

次に $M\in Z'(Pic)$ とし, $A=M\otimes_{S^2}(S\# H)$ とする。この時 A が S/R-Azumaya alg の構造をもつ条件 ~~—~~ を考える。
M の cocycle condition より次の S^3-iso. が得られる。

$$\phi:\ A\otimes S\cong Hom_{R\otimes S}(A,A)$$

$\phi(a\otimes 1)(x)=a\circ x$ と書くことにする。$a\in A,\ x\in A$. ϕ より
$\Phi_1,\Phi_2:\ A\otimes A\longrightarrow Hom(A,A)$ なる maps を次の様に def.

する。 $(\Phi_1(a\otimes b))(x) = (a\circ x)\circ b \qquad x, a, b\in A$

$(\Phi_2(a\otimes b))(x) = a\circ(x\circ b)$

ここで $A\otimes A$ を次の見方で S^4-module と見る。 $(p\otimes q\otimes r\otimes s)\cdot(a\otimes b)$ $= par\otimes sbq \qquad a\otimes b\in A\otimes A,\ p\otimes q\otimes r\otimes s\in S^4$

この見方は，A が S/R-Azumaya alg の時の同型 $A\otimes A^\circ \cong \mathrm{Hom}(A,A)$ を反映させたものである。$A\otimes A$ をこの様に S^4-module と見ると Φ_1, Φ_2 は S^4-homomorphism となり localize して調べることにより Φ_1, Φ_2 は S^4-isomorphism がわかる。従って $\Phi_1^{-1}\cdot\Phi_2$ は S^4-auto. of $A\otimes A$ であるから $\Phi_1^{-1}\cdot\Phi_2 \in S^4$ と思ってよい。

$\mu(M,\phi) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (\mathrm{perm}\,(2\,4\,3))\,\Phi_1^{-1}\cdot\Phi_2 \in S^4$ とおく。但し $(\mathrm{perm}\,(2\,4\,3))(x_1\otimes x_2\otimes x_3\otimes x_4) = x_1\otimes x_3\otimes x_4\otimes x_2 \quad , x_1\otimes x_2\otimes x_3\otimes x_4\in S^4$.

<u>Theorem 3.2.</u>

$\mu(M,\phi)$ は functor として U (unit) を取ったときの Amitsur complex での 3-cocycle であり，ϕ' を他の同型とした時は $\mu(M,\phi') \equiv \mu(M,\phi)$ mod.(coboundary) である。さらに，

$\mu(M,\phi)$ が coboundary $\Longleftrightarrow$ $A = M\otimes_{S^2}(S\# H)$ が M のもとの S^2-module structure と compatible な S/R-Azumaya alg の構造をもつ。

(証明) $\mu(M,\phi)$ が 3-cocycle であることは localize して調べればよい。ϕ' を他の同型とした時 $\exists u\in S^3$ s.t. $\phi = \phi' u$

であり，実際計算を行えば u を coboundary operator D でうつしたものが，丁度 $\mu(M,\phi)$ と $\mu(M,\phi')$ の違いとして現れるからよい。最後の部分については，$\mu(M,\phi)=D(u)$ とすると $\phi'=\phi u^{-1}$ で新しい S^2-iso $\phi': A\otimes S \cong Hom_{R\otimes S}(A,A)$ を作り，A の積を $a\cdot b=(\phi'(a\otimes 1))(b)$ で定義すれば，$\mu(M,\phi')=1$ となるから A は associative alg. となる。そしてこの積で ϕ' は S-alg. iso となるから，A は S/R-Azumaya alg となる。逆は明らか。

以上の結果は cohomology を用いて統一的に述べることができる。その為に

<u>Proposition 3.3.</u> $\alpha_q: S^{q+1} \longrightarrow Hom(H^q, S)$

$(\alpha_q(x_1\otimes\cdots\otimes x_{q+1}))(h_1\otimes\cdots\otimes h_q) = x_1h_1\cdot(x_2h_2\cdot(\cdots(x_qh_q\cdot x_{q+1})\cdots)$

は alg. iso. である。

(証明) $q=0,1$ については明らかである。一般の時を証明する為には，R を体と仮定してもよいことに注意して，induction を用いればよい。

Proposition 3.3. を用いて，拡大 S/R の Amitsur complex (functor F) と同型な complex $\{F(Hom(H^q,S))\}$ を作ることができる。((co)boundary operator は Amitsur complex の方から

同型を利用してうつす。）例えば，functor として U: units functor を取れば，2次元の Amitsur cohomology が normal 2-cocycle の equivalence classes と同型に対応する。（normal については Amitsur の方でも normal なものを考えればよい。）従って，2つの complex の cohomology を同じ記号 $H^n(\mathcal{F})$ と書く．さらに Pic は Picard group を対応させる functor とする。

今まで調べたことから，Amitsur cohomology の Brauer 群を含む 7-terms exact seq. の一部を具体的に作ることができる。

<u>Theorem 3.4</u> $H^0(Pic) \longrightarrow H^2(U) \longrightarrow Br(S/R) \longrightarrow H^1(Pic) \longrightarrow H^3(U)$ は exact である。写像の構成は証明中で与える。

（証明） $H^0(Pic) \to H^2(U)$: map は Prop. 2.6 及び Cor 2.8 で与えられる normal 2-cocycle を対応させる。

$H^2(U) \longrightarrow Br(S/R)$: smash product の class を対応させる。

$Br(S/R) \longrightarrow H^1(Pic)$: $Br(S/R)$ の代表元として S/R-Azumaya alg A を取り $\theta(A)$ の class を対応させる。

$H^1(Pic) \longrightarrow H^3(U)$: <u>Theorem 3.2</u> で作った cocycle の class を対応させる。これらの写像は全て group homo であることが証明でき（証明は略す），Cor. 2.8. Prop. 1.4. が $H^2(U)$ の所での完全性を，Th. 2.3. が $Br(S/R)$ の所での完全性を，Th. 3.2 が $H^1(Pic)$

の所での完全性を示している。

(注意) Th. 3.4. の seq. を 7-terms まで拡張して具体的に構成することは可能である。詳しくは [8] 参照。ここでは S/R-Azumaya alg. を S^2-module と見た時の構造が, Brauer群を含む seq. にどの様に関係しているか記述するにとどめた。

最後に, separable Galois の時, Kanzaki [6] と我々の関係を調べて見る。 S/R : sep. Galois ext. with Galois group G とする。この時 $H=RG$ とすれば S/R は我々の意味で H-Hopf Galois 拡大である。A を S/R-Azumaya alg. とすれば, 神崎氏の結果より, $A=\sum^{\oplus} J_\sigma$, $J_\sigma=\{x\in A \mid xs=\sigma(s)x \ \forall s\in S\}$ と分解する。我々の結果では, $A=\theta(A)\otimes_{S^2}(S\# H)=\theta(A)\otimes_{S^2}SG$, 但し SG の S^2-structure は $x\otimes y\cdot s\sigma = xs\,y^{\sigma}\sigma$, $\sigma\in G$.

$S^2\cong Hom(H,S)=Hom(RG,S)=\sum_{\sigma\in G}^{\oplus} Sv_\sigma$, $v_\sigma(\tau)=\delta_{\sigma,\tau}$ $v_\sigma\in Hom(RG,S)$, と S^2 は rings Sv_σ の直和に分解する。この分解に従って, $A=\theta(A)\otimes_{S^2}SG$ を分解すれば, 神崎氏の分解が得られるのである。例えば, Lemma 2.4. の結果は $J_e=S$ を意味する結果である。但し $e\in G$ は単位元である。

References.

[1] M. Auslander and O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 367—409.

[2] S. Chase, D. Harrison and A. Rosenberg, Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1965), 15 – 33.

[3] S. Chase and A. Rosenberg, Amitsur cohomology and the Brauer group, Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1965), 34 – 79.

[4] S. Chase and M. Sweedler, Hopf algebras and Galois theory, Lecture Notes in Math. 97 (1969), Springer.

[5] A. Hattori, Certain cohomology associated with Galois extensions of commutative rings, Sci. Papers. College. Gene. Edu. Uni. Tokyo. 24, (1974), 79 – 91.

[6] T. Kanzaki, On generalized crossed product and Brauer group, Osaka J. Math. 5 (1968), 175 – 188.

[7] M. Sweedler, Cohomology of algebras over Hopf algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 133 (1968), 209 – 239.

[8] K. Yokogawa, On $S \otimes_R S$ - module structure of S/R - Azumaya algebras, (to appear)